

# SÉQUENCE : PARALLÉLOGRAMME

## (sans les parallélogrammes particuliers)

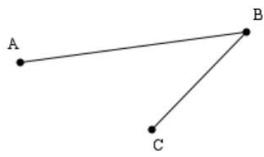
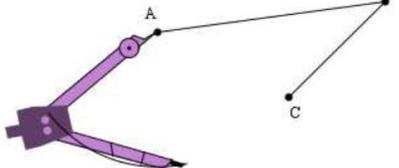
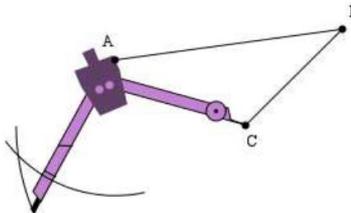
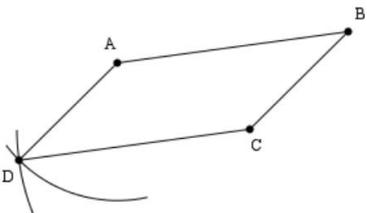
| Séance | Contenus  |
|--------|---|
| 1      | <p><b>Prérequis choisis : Évaluation diagnostique</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Connaître la signification des locutions « diagonales », « côtés opposés » et « angles opposés » dans un quadrilatère.</li><li>- Savoir nommer un quadrilatère, un triangle et un angle ;</li><li>- Savoir ce qu'est un quadrilatère croisé et un quadrilatère non croisé ;</li><li>- Connaître les deux propriétés (sens direct et réciproque) relatives aux angles alternes-internes ;</li><li>- Savoir écrire la réciproque d'une implication (si... alors...).</li><li>- Connaître les cas d'égalité des triangles égaux.</li><li>-</li></ul> <p><b>Activité et leçon : I. Introduction</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- construire un parallélogramme au compas ;</li><li>- Justifier cette construction ;</li><li>- choix de la définition du parallélogramme.</li></ul> |
| 2      | <p><b>Activité et leçon : I. Propriétés du parallélogramme (côtés/angles)</b></p> <p><b>a. Deux propriétés</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Démontrer que le parallélogramme se décompose en deux triangles égaux ;</li><li>- Démontrer la propriétés sur les angles opposés du parallélogramme ;</li><li>- Démontrer la propriété sur le parallélisme des côtés.</li></ul>  |
| 3      | <p><b>Entraînement</b> : - Utiliser ces propriétés pour démontrer.</p>  |
| 4      | <p><b>Activité et leçon : b. Et les réciproques</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Démontrer les réciproques des deux propriétés.</li></ul> <p><b>Entraînement</b> : Savoir utiliser ces réciproques pour démontrer.</p>   |
| 6      | <p><b>Activité et leçon : III. Diagonales et parallélogramme</b></p> <p><b>a. Sens direct</b></p> <p><b>b. Sens réciproque</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Démontrer la prop des diagonales ;</li><li>- Démontrer la réciproque.</li></ul>  |
| 7      | <p><b>Entraînement</b> : - Utiliser la propriété des diagonales et sa réciproque pour démontrer ;</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Utiliser toutes les propriétés vues pour démontrer.</li></ul>   |
| 8      | <p><b>Activité et leçon : IV. Aire du parallélogramme</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Trouver la formule d'aire du parallélogramme,</li></ul> <p><b>Entraînement</b> : Calculer l'aire de parallélogrammes.</p>   |

# CHAPITRE 14 : PARALLÉLOGRAMME

## I. Introduction : Construction à la règle et au compas

### Activité n°1

Ci-dessous, les étapes de construction d'un quadrilatère particulier.

|   |  |
|---|--|
|  |  |
| <p>❶ On trace les deux côtés <math>[AB]</math> et <math>[BC]</math>.</p>          | <p>❷ On trace un arc de cercle de centre A et de rayon BC.</p>                     |
|  |  |
| <p>❸ On trace un arc de cercle de centre C et de rayon AB.</p>                    | <p>❹ On nomme D le point d'intersection des deux Arcs de cercle tracés.</p>        |

- a. Complète les figures ci-dessous en suivant la méthode de construction précédente de manière à construire des quadrilatères non croisés.

Figure 1

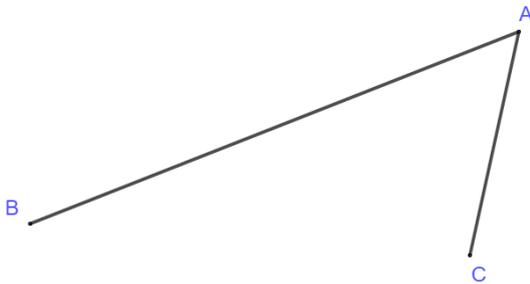


Figure 2

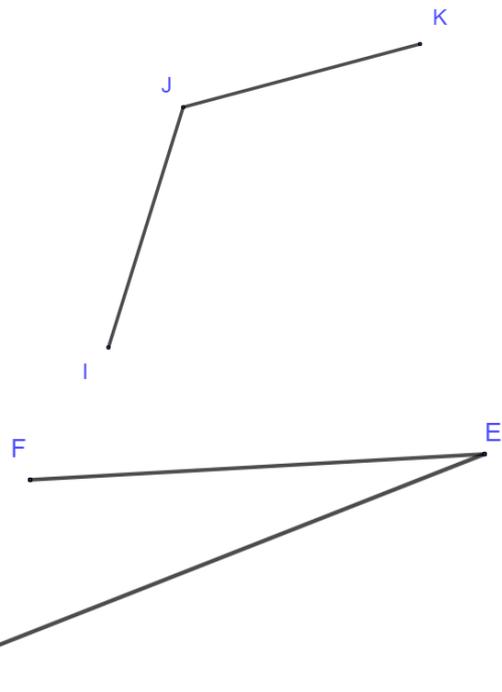


Figure 3



- b. Quelle semble être la nature de ces quadrilatères ? Ces quadrilatères semblent être des parallélogrammes.  
 c. Conjecture une propriété sur les parallélogrammes à partir des constructions précédentes.

Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.

## Bilan

### Définition

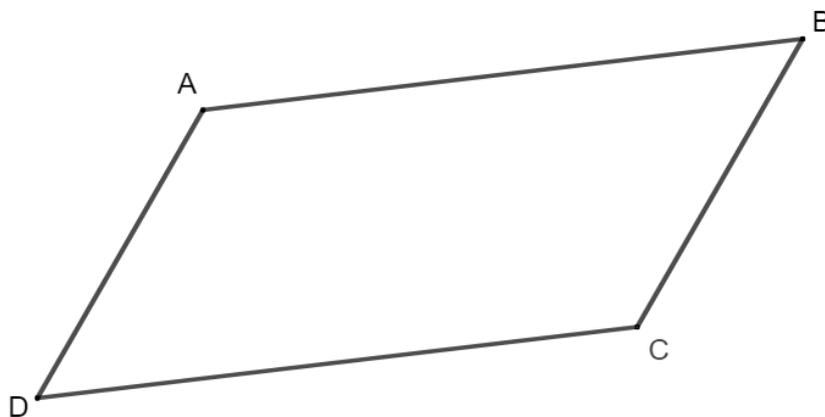
Un quadrilatère est dit *parallélogramme* si ses côtés opposés sont parallèles.

## II. Propriétés du parallélogramme

### a. Décomposition du parallélogramme en deux triangles

#### Activité n°2

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



#### 1. Décomposition du parallélogramme en deux triangles.

- Trace la diagonale [AC] du parallélogramme.
- Que peux-tu dire des triangles ABC et CDA ? Démontre-le.

#### 2. Angles et longueurs de côté du parallélogramme.

- Code les angles et côtés de la figure en t'appuyant sur la définition des triangles égaux.
- Écris une propriété qui porte sur les longueurs de côté du parallélogramme.
- Écris une propriété qui porte sur les angles du parallélogramme.

## Bilan

Nous avons démontré qu'un parallélogramme se décompose en deux triangles égaux si on le partage le long de la diagonale.

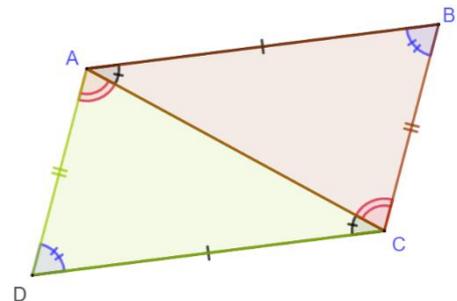
Dans l'activité précédente, nous avons démontré les propriétés suivantes :

### Propriété

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur.

### Propriété

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont égaux.



## b. Les réciproques de ces deux propriétés sont-elles vraies ?

### Activité n°3

Prenons la propriété : « Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont égaux. »

1. Écris la réciproque de cette propriété.
2. Démontre que cette réciproque est vraie.

### Activité n°4

Prenons la propriété : « Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur. »

1. Écris la réciproque de cette propriété.
2. Essaie de construire un quadrilatère qui a ses côtés opposés non parallèles et qui n'est pas un parallélogramme.
3. Démontre que cette réciproque est vraie.

### Bilan

Nous avons démontré dans les deux activités précédentes, les deux propriétés suivantes.

#### Propriété réciproque

Si un quadrilatère (non croisé) a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

#### Propriété réciproque

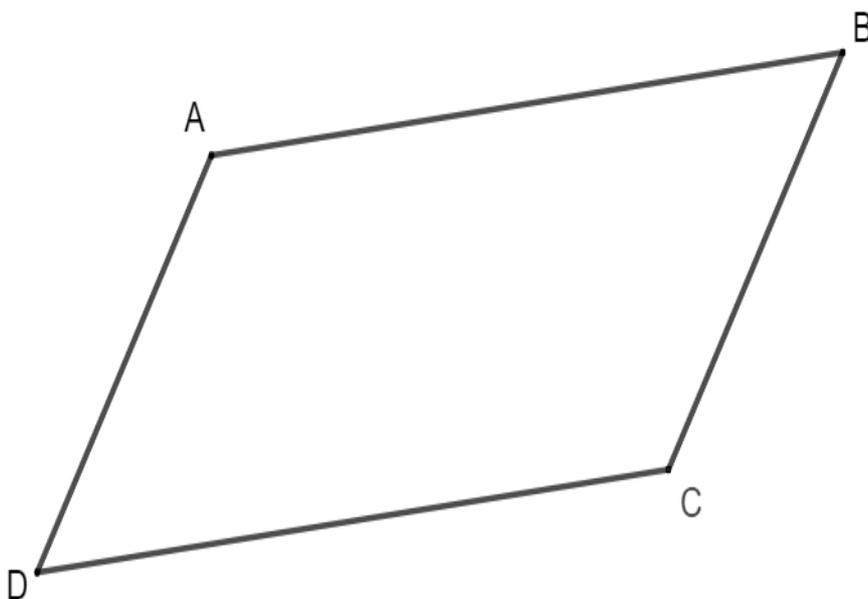
Si un quadrilatère (non croisé) a ses angles opposés égaux, alors c'est un parallélogramme.

## III. Diagonales et parallélogrammes

### a. Que dire des diagonales d'un parallélogramme ?

#### Activité n°5

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



1. Construis les diagonales de ce parallélogramme et nomme I le point d'intersection des diagonales.
2. Émets une conjecture quant aux diagonales du parallélogramme.
3. Démontre que ABI et CID sont des triangles égaux.
4. Démontre que AID et CIB sont des triangles égaux.
5. Démontre que ta conjecture est vraie ou démontre qu'elle est fausse.

## Bilan

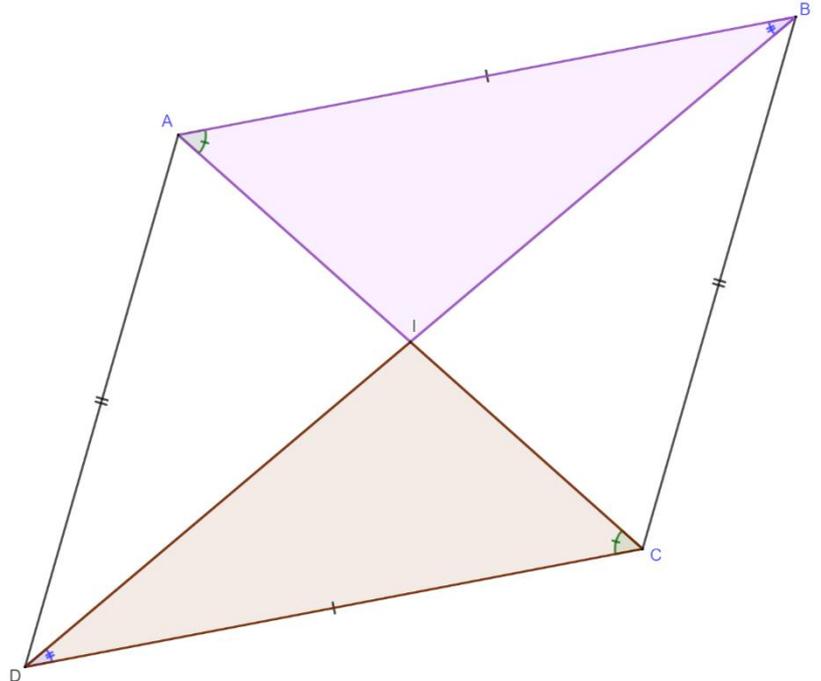
Les parallélogrammes se décomposent en deux paires de triangles égaux si on les partage le long des diagonales. Ici, AID et CIB sont égaux ainsi que AIB et CID.

Nous avons démontré dans l'activité précédente la propriété suivante :

### Propriété

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

(Et l'intersection des diagonales est le centre de symétrie du parallélogramme.)



## b. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

### Activité n°6

Prenons la propriété : « Si un quadrilatère est un parallélogramme , alors ses diagonales se coupent en leur milieu. ».

1. Écris la réciproque de cette propriété.
2. Construis deux segments qui se coupent en leur milieu. Le quadrilatère dont ces deux segments sont les diagonales semble-t-il être un parallélogramme ?
3. Démontre que la réciproque est vraie ou démontre qu'elle est fausse.

## Bilan

Nous avons démontré dans l'activité précédente la propriété suivante.

### Propriété réciproque

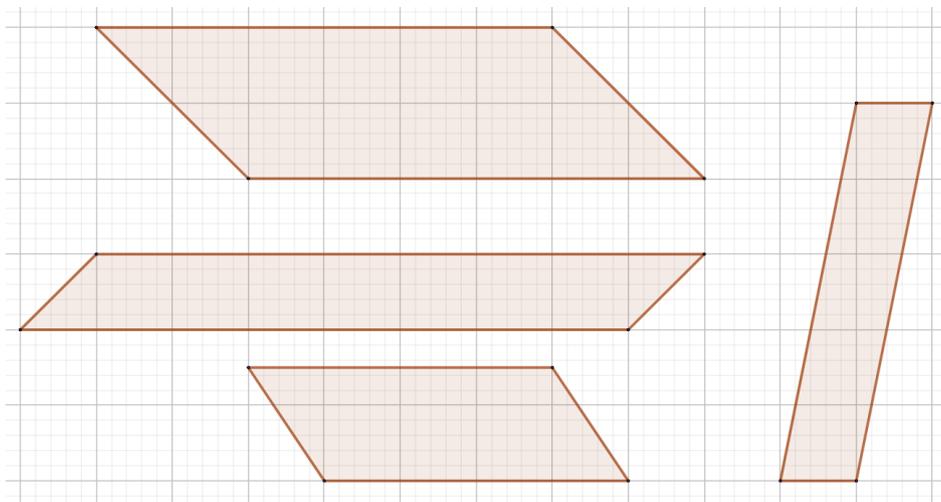
Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

## IV. Aire du parallélogramme

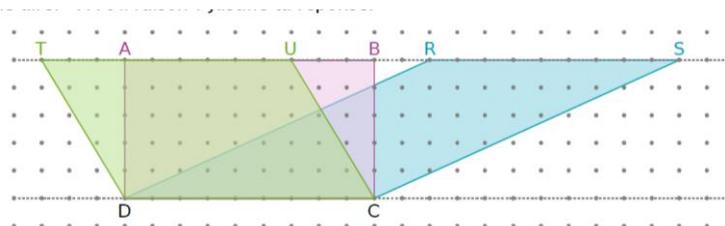
### Activité n°7

On cherche à trouver une formule de l'aire d'un parallélogramme.

1. Trouver l'aire des parallélogrammes suivants. 1 grand carreau correspond à 1 unité d'aire (1 ua)



2. Rédige une phrase qui explique la formule de l'aire du parallélogramme.
3. Que peux-tu dire des aires des parallélogrammes TUCD, ABCD et RSCD ?



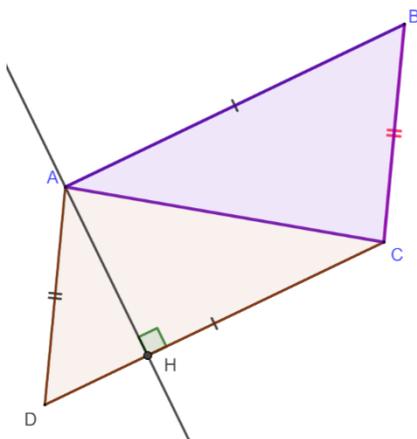
Source de l'image : Manuel Sésamath 5<sup>e</sup>

### Bilan

**Définition :** Une hauteur d'un parallélogramme est une droite qui passe par un sommet du parallélogramme et qui coupe un côté opposé perpendiculairement. Ce côté opposé est la base associée à cette hauteur.

**Propriété :** L'aire du parallélogramme est donnée par la formule :  $A = \text{base} \times \text{hauteur}$ , la base étant la base associée à la hauteur.

#### Démonstration



Un parallélogramme se décompose en deux triangles égaux, donc en deux triangles de même aire.

Cherchons l'aire d'un des deux triangles.

Remarquons que si l'on choisit bien la hauteur du triangle et sa base associée, cette hauteur et cette base sont également hauteur et base associée du parallélogramme. Sur notre figure, (AH) est une hauteur du triangle ABC et une hauteur du parallélogramme. [DC] est la base relative à cette hauteur pour le triangle et le parallélogramme.

L'aire du parallélogramme est donc :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \times 2 = \text{base} \times \text{hauteur}$$