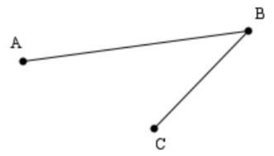
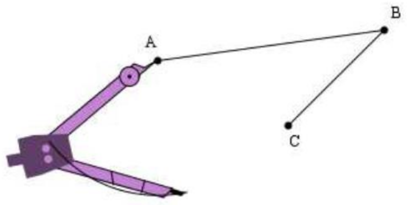
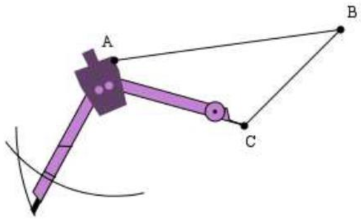
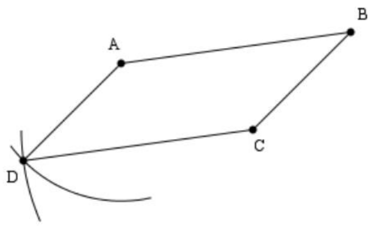
CHAPITRE 14 : PARALLÉLOGRAMME

I. Introduction : Construction à la règle et au compas

Activité n°1

Ci-dessous te sont présentées les étapes de construction d'un quadrilatère particulier.

	
❶ On trace les deux côtés [AB] et [BC].	❷ On trace un arc de cercle de centre A et de rayon BC.
	
❸ On trace un arc de cercle de centre C et de rayon AB.	❹ On nomme D le point d'intersection des deux Arcs de cercle tracés.

a. Complète les figures ci-dessous en suivant la méthode de construction précédente de manière à construire des quadrilatères non croisés.

Figure 1

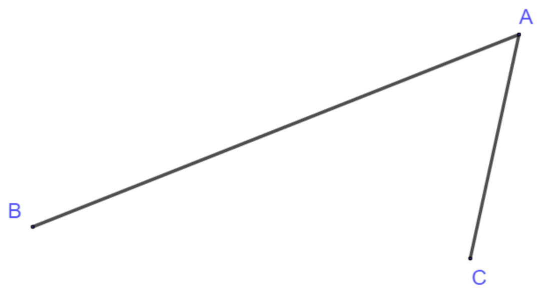


Figure 2

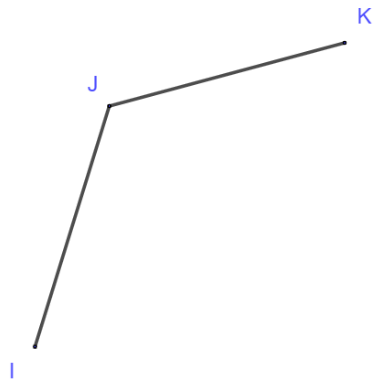
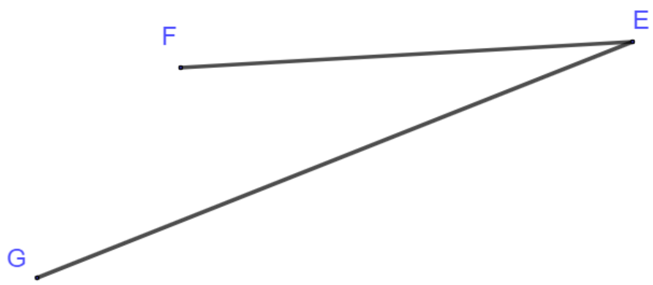


Figure 3



b. Quelle semble être la nature de ces quadrilatères ?

c. Quelle propriété mathématique se cachent derrière cette méthode de construction ?

. . . .

. . . .

Bilan

Pour simplifier, dans ce chapitre, nous dirons « quadrilatère » pour dire « quadrilatère non croisé ».

Cette année, en nous appuyant sur la méthode de construction précédente, nous choisissons de définir le parallélogramme ainsi :

Définition

. . . .

. . . .

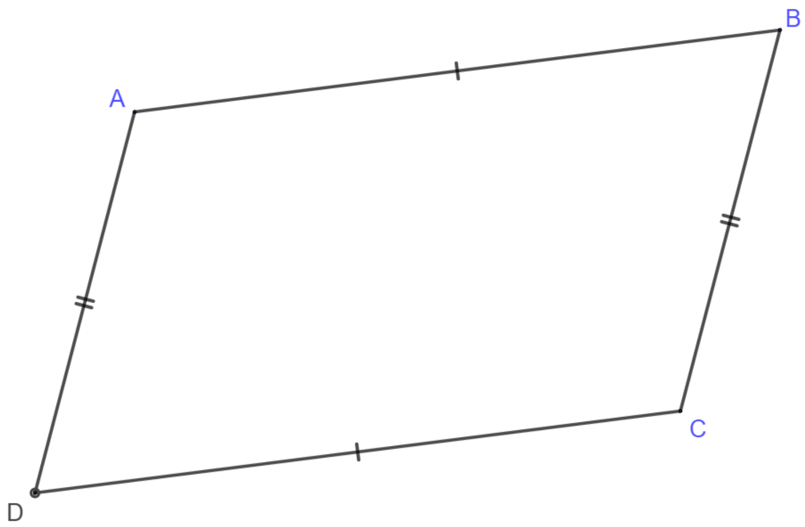
. . . .

II. Propriétés du parallélogramme

a. Décomposition du parallélogramme en deux triangles

Activité n°2

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



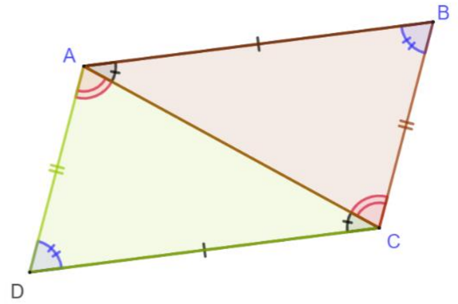
1. **Décomposition du parallélogramme en deux triangles.**
   - **a.** Code la figure en t’appuyant sur la définition du parallélogramme, puis trace la diagonale [AC] du parallélogramme.
   - **b.** Que peux-tu dire des triangles ABC et CDA ? Démontre-le.

2. **Angles du parallélogramme.**
   - **a.** Code les angles de la figure en t’appuyant sur la définition des triangles égaux.
   - **b.** Écris une propriété qui porte sur les angles du parallélogramme.

3. **Parallélisme des côtés du parallélogramme.**
   - **a.** Démontre que les côtés [AB] et [DC] sont parallèles. Puis démontre que les côtés [AD] et [BC] le sont également.

Bilan

Nous avons démontré qu'un parallélogramme se décompose en deux triangles égaux si on le partage le long de la diagonale.



Dans l'activité précédente, nous avons démontré les propriétés suivantes :

Propriété

. . . .

. . . .

Propriété

. . . .

. . . .

b. Les réciproques de ces deux propriétés sont-elles vraies ?

Nous allons nous demander ici à quelles conditions un quadrilatère est un parallélogramme.

Nous connaissons déjà une condition : par définition, si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Trouvons d'autres conditions suffisantes pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Activité n°3

Prenons la propriété : « Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont égaux deux à deux. »

1. Écris la réciproque de cette propriété.
2. Démontre que cette réciproque est vraie.

Activité n°4

Prenons la propriété : « Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. »

1. Écris la réciproque de cette propriété.
2. Essaie de construire un quadrilatère qui a ses côtés opposés non parallèles et qui n'est pas un parallélogramme.
3. Démontre que cette réciproque est vraie.

Bilan

Nous avons démontré dans les deux activités précédentes, les deux propriétés suivantes.

Propriété réciproque

. . . .

. . . .

Propriété réciproque

. . . .

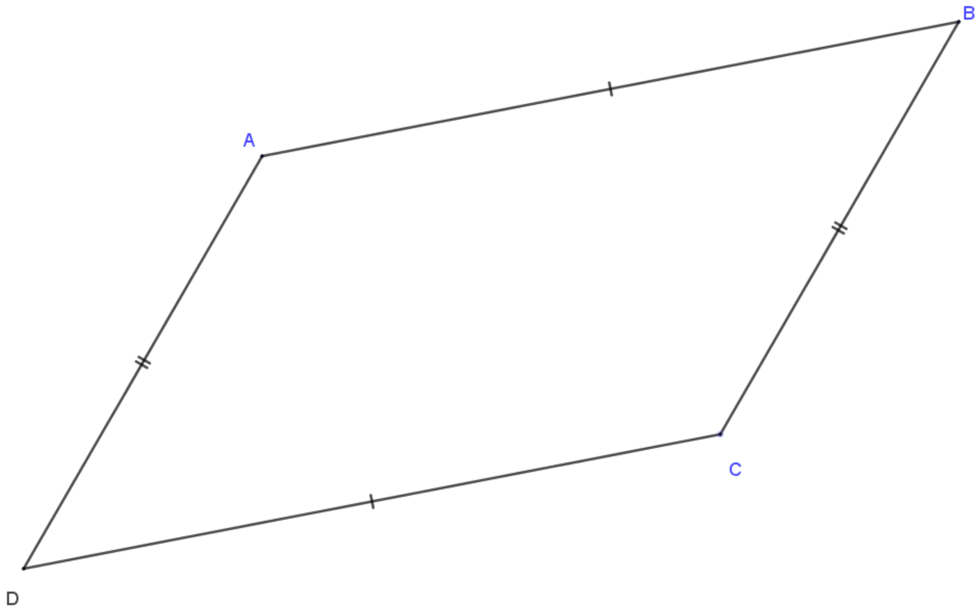
. . . .

III. Diagonales et parallélogrammes

a. Que dire des diagonales d’un parallélogramme ?

Activité n°5

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



1. Construis les diagonales de ce parallélogramme et nomme I le point d’intersection des diagonales.
2. Emets une conjecture quant aux diagonales du parallélogramme.
3. Démontre que ABI et CID sont des triangles égaux.
4. Démontre que AID et CIB sont des triangles égaux.
5. Démontre que ta conjecture est vraie ou démontre qu’elle est fausse.

Bilan

Les parallélogrammes se décomposent en deux paires de triangles égaux si on les partage le long des diagonales. Ici, AID et CIB sont égaux ainsi que AIB et CID.

Nous avons démontré dans l’activité précédente la propriété suivante :

Propriété

. . . .

. . . .

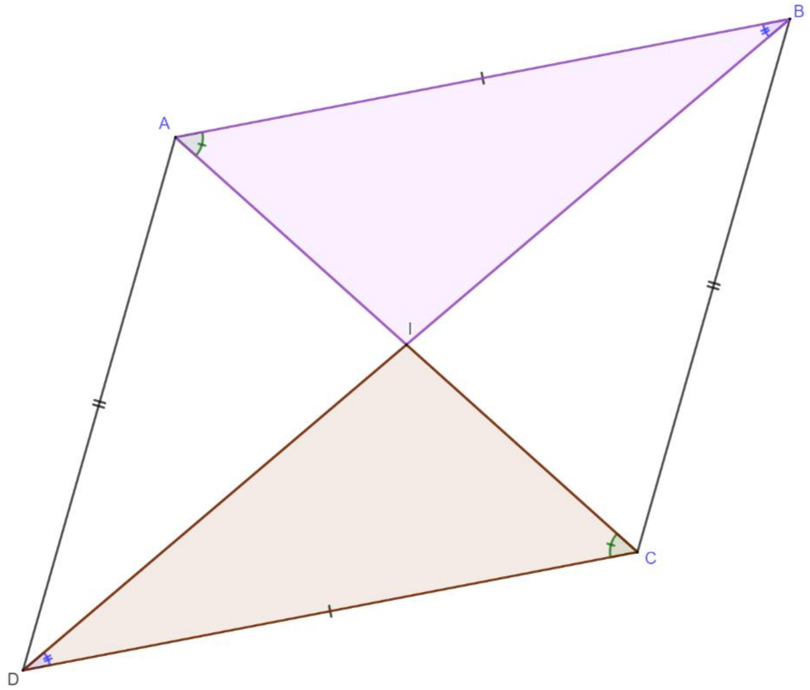
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



b. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

Activité n°6

Prenons la propriété : « Si un quadrilatère est un parallélogramme , alors ses diagonales se coupent en leur milieu. ».

1. Écris la réciproque de cette propriété.
2. Construis deux segments qui se coupent en leur milieu. Le quadrilatère dont ces deux segments sont les diagonales semble-t-il être un parallélogramme ?
3. Démontre que la réciproque est vraie ou démontre qu'elle est fausse.

Bilan

Nous avons démontré dans l'activité précédente la propriété suivante.

Propriété réciproque

. . . .

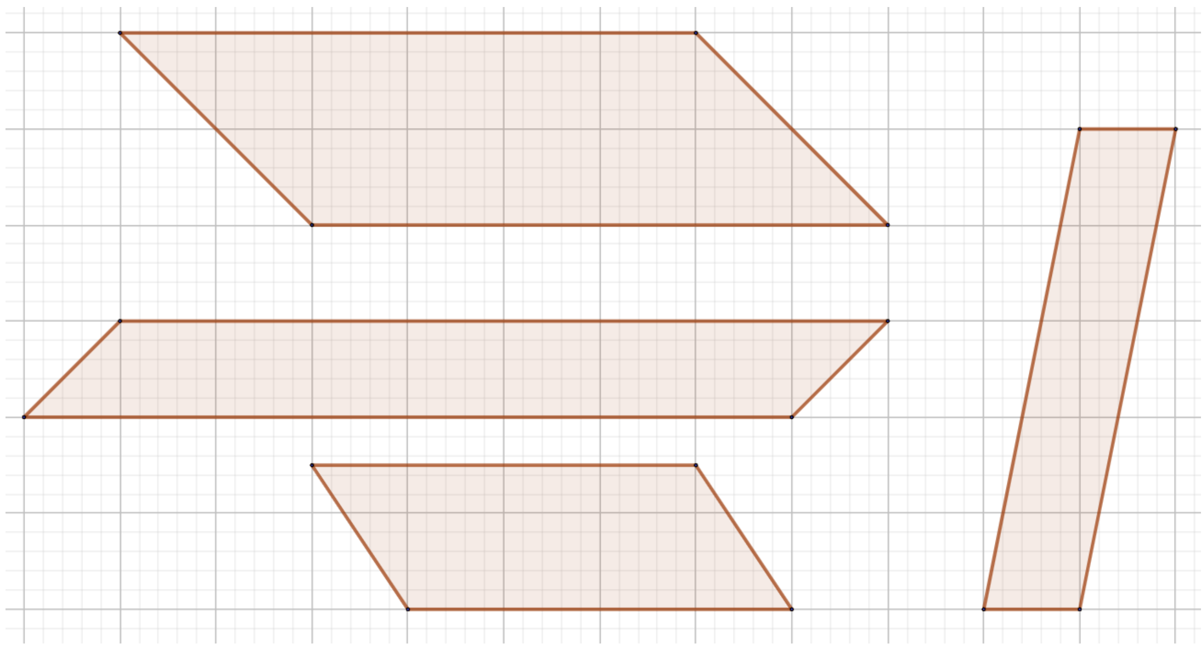
. . . .

IV. Aire du parallélogramme

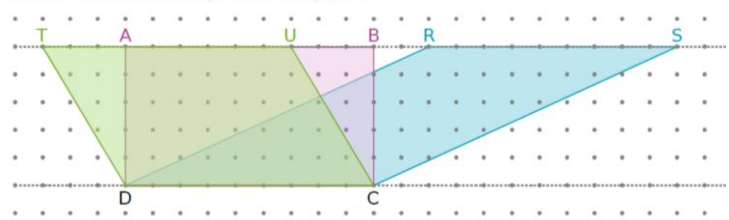
Activité n°7

On cherche à trouver une formule de l'aire d'un parallélogramme.

1. Trouver l'aire des parallélogrammes suivants. 1 grand carreau correspond à 1 unité d'aire (1 ua)



2. Rédige une phrase qui explique la formule de l'aire du parallélogramme.
3. Que peux-tu dire des aires des parallélogrammes TUCD, ABCD et RSCD ?



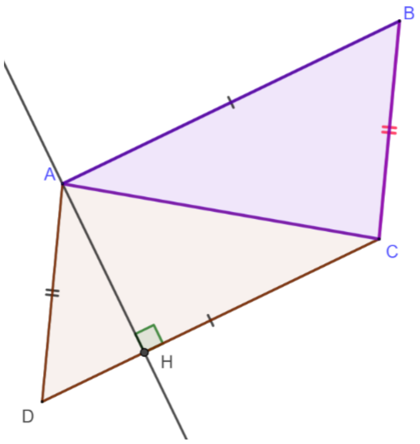
Source de l'image : Manuel Sésamath 5e

Bilan

Définition : Une hauteur d'un parallélogramme est une droite qui passe par un sommet du parallélogramme et qui coupe un côté opposé perpendiculairement. Ce côté opposé est la base associée à cette hauteur.

Propriété : L'aire du parallélogramme est donnée par la formule : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{base} \times \boldsymbol{hauteur}$, la base étant la base associée à la hauteur.

Démonstration



Un parallélogramme se décompose en deux triangles égaux, donc en deux triangles de même aire.

Cherchons l'aire d'un des deux triangles.

Remarquons que si l'on choisit bien la hauteur du triangle et sa base associée, cette hauteur et cette base sont également hauteur et base associée du parallélogramme. Sur notre figure, (AH) est une hauteur du triangle ABC et une hauteur du parallélogramme. [DC] est la base relative à cette hauteur pour le triangle et le parallélogramme.

L'aire du parallélogramme est donc :

$$\frac{base \times hauteur}{2} \times 2 = base \times hauteur$$